D/ $\left(\int_a^b |f-f_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \|f-f_n\|_\infty^2\right)^{1/2} = \sqrt{b-a}\,\|f-f_n\|_\infty$

⚠ Pas de réciproque $f_n(x) = x^n$ sur $(0,1)$

$\int_0^1 f_n^2 \longrightarrow 0$ mais $f_n \not\xrightarrow{CVU} 0$

## II Ouverts, fermés, etc...

### A) Topologie d'un espace métrique

$(X, d)$ est un espace métrique

Déf : On dit que le sous-ensemble $O$ de $X$ est ouvert lorsque $\forall a \in O\ \exists r > 0,\ B(a, r) \subset O$

Ex : $\emptyset$ et $X$ intervalle ouverts de $\mathbb{R}$

Contre : $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ : pas ouvert

Prop 1) $\emptyset$ et $X$ sont ouverts de $X$

2) Si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouvert de $X$
$\bigcup_{i \in I} O_i$ ouvert

3) Si $O_1, \dots, O_p$ est une famille finie d'ouverts de $X$ $O_1 \cap \dots \cap O_p$ est ouverte

D/ 2) Soit $a \in \bigcup_{i \in I} O_i$ il existe $i_0 : O_{i_0} \ni a$ ...

3) Soit $a \in O_1 \cap \dots \cap O_p$

Pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$ il existe $\varepsilon_k > 0$ tq

$B(a, \varepsilon_k) \subset O_k$ $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq p} \varepsilon_k$

vérifie $B(0,\varepsilon) \subset \bigcap_{1}^{P} O_k$

⚠ $O_k = ]-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}[$ $\bigcap O_k = \{0\}$ est fermé

Une famille de parties X de X vérifiant $T_1 - T_2 - T_3$ ~~Une famille~~ est appelée une Topologie

Ex: $\{\emptyset, X\}$ grossière, $\mathcal{P}(X)$ discrète

$x \in \mathbb{N}$ $d(x,y) = |x-y|$ Soit $O \subset \mathbb{N}$ $a \in O$ alors
$B(a, 1/2) = \{a\} \subset O$

$O$ est ouvert

- Voisinage Une partie $U$ de X est appelée voisinage de a lorsque $\exists \varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \subset U$

- Un ouvert est alors voisinage de chacun de ses points

Ex: $B(b,r), r > 0$ est un ouvert

Soit $a \in B(b,r)$, posons $\varepsilon = r - d(b,a) > 0$

On veut $B(a,\varepsilon) \subset B(b,r)$

Soit $x \in B(a,\varepsilon)$: $d(b,x) \leq d(b,a) + d(a,x)$

donc $d(b,x) < d(b,a) + \varepsilon = r$

Ainsi $x \in B(b,r)$

Props On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$

1) Si $U \in \mathcal{V}(a)$ et $U \subset V$ alors $V \in \mathcal{V}(a)$ (DEF)

2) Si $U_1, \dots, U_p \in \mathcal{V}(a)$, $U_1 \cap \dots \cap U_p \in \mathcal{V}(a)$ (⚠ fini)

3) Si $a \neq b$ il existe $U \in \mathcal{V}(a)$, $V \in \mathcal{V}(b)$ : $U \cap V = \emptyset$

si $a \neq b$ il vient $\varepsilon = \frac{1}{2} d(a,b) > 0$

si $x \in B(a,\varepsilon) \cap B(b,\varepsilon)$ $d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x) < 2\varepsilon = d(a,b)$

ABS

## B) Fermé :

Def : Soit $F$ une partie de $X$, On dit que $F$ est fermé dans $X$ lorsque $X \setminus F$ est ouvert dans $X$

Ex : 1) $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ ouvert $\Rightarrow [a,b]$ fermé

2) Boule fermée : $a \notin \overline{B}(b,r)$ Posons

$\varepsilon = d(a,b) - r >$

Soit $x \in B(a,\varepsilon)$ on veut $d(b,x) > r$

$d(b,x) \geq d(b,a) - d(a,x) > d(b,a) - \varepsilon = r$

3) Reunion finie de points

Prop:

1) $\phi$ et $X$ sont fermés ds $X$

2) Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de $X$

$\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé dans $X$

$\left(\bigcap (F_i)_{i\in I}\right)^C = \bigcup_{i\in I} \underbrace{F_i^C}_{\text{ouverts}}$

3) Une réunion finie de fermés de $X$ est fermée.

Ex I:

Alors Adh de $u$ est fermé

D/ Soit $O = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Adh}\, u$. On va Mq $O$ est ouvert (?)

Soit $b \in O$, $b \notin \mathrm{Adh}(u)$ se traduit par

$(\exists \varepsilon > 0)(\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(b, \varepsilon)\})$ est fini

Soit $b' \in B(b, \varepsilon)$ il existe $\eta > 0$ tq $B(b', \eta) \subset B(b, \varepsilon$
quitte a

A fortiori $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in B(b', \eta)\}$ est fini

donc $b'$ n'est pas une VA, $B(b, \varepsilon) \subset O$

**Exercice** Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$ muni de $\|u\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

Mq $\{u \in E \mid u_0 \neq 0, \dots, u_N \neq 0\}$ est ouvert

S/ Soit $u \in O$ $\forall v \in E$ on cherche $\varepsilon > 0$ tq $\forall v \in E$ $\|v-u\| < \varepsilon$ $\Rightarrow v \in O$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(|u_0|, \dots, |u_N|)$

$\|v-u\| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n - v_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \in \{0, \dots, N\},\ |u_n - v_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ ______________________ $, v_n \neq 0$

② $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $O = \{f \in E \mid f > 0\}$

$F = \{f \in E \mid f \geq 0\}$

1) $O$ ouvert pour $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_1$

2) $F$ fermé pour $\| \ \|_\infty$ ? Pour $\| \ \|_1$ ?

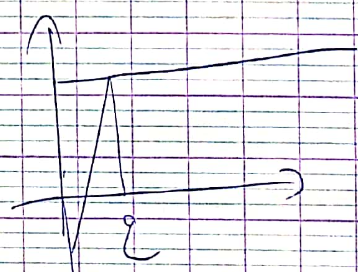
1. $\| \ \|_\infty$ : prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}\min f$

$\| \ \|_1$ : rappel : $\forall f\ \|f\|_1 = \int_a^b |f|$

pas ouvert fermé pour $\| \ \|_1$ :

$\rightarrow f = 1$

$\rightarrow g =$




$\|f-g\|_1 < \varepsilon$ $\quad O$ non ouvert

$g \notin O$

## c) Topologie induite :

Données : $(X, d)$ un em, $A$ une partie de $X$. On note $d_A$ la restriction de $d$ à $A^2$, $(A, d_A)$ est alors un espace métrique

Obs : Si $a \in A$ : $\underbrace{B_{d_A}(a, r)}_{\text{dans } A} = \underbrace{B(a, r) \cap A}_{\text{dans } X}$

Th 1) Une partie $O$ de $A$ est ouverte pour $d_A$ ssi il existe un ouvert $\Omega$ de $X$ tq $O = A \cap \Omega$

2) Une partie $F$ de $A$ est fermée pour $d_A$ ssi il existe un fermé $G$ de $X$ tq $F = A \cap G$

1- ($\Leftarrow$) Soit $a \in A \cap \Omega$. Puisque $\Omega$ est ouvert dans $X$ il existe $r > 0$ tq $B(a, r) \subset \Omega$, d'où $B(a, r) \cap A \subset \Omega \cap A$

($\Rightarrow$) Soit $a \in O$, il existe $r_a > 0$ tq $B_{d_A}(a, r_a) \subset O$

On a donc $O = \bigcup_{a \in O} B_{d_A}(a, r_a) = \bigcup_{a \in O} (B(a, r_a) \cap A)$

$= \underbrace{\left(\bigcup_{a \in O} B(a, r_a)\right)}_{\Omega} \cap A$

2) Complémentarité ($\Leftarrow$) $A \setminus (G \cap A)$

$= \underbrace{(X \setminus G)}_{\Omega \text{ ouvert}} \cap A$

ainsi $A \setminus (G \cap A)$ est ouvert dans $A$ et donc $G \cap A$ est fermé dans $A$

($\Rightarrow$) Exercice

Conséquences : 1) Tout ouvert de A est ouvert dans X $\Leftrightarrow$ A ouvert dans X

2) Tout fermé de A est fermé dans X $\Leftrightarrow$ A fermé dans X

## D) Intérieur

**Déf :** Soit A une partie de X. On dit que le point $a \in A$ est intérieur à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tq $B(a,\varepsilon) \subset A$ (ie : $A \in \mathcal{V}(a)$) (ie $A \in \mathcal{V}_a$)

Int(A) (ou $\mathring{A}$) est l'ensemble des points intérieurs à A

Ex : $A = \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$A = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$

**Prop** Int(A) est ouvert, et c'est le plus grand ouvert $\subset A$.

Si $a \in \mathrm{Int}(A)$ et $B(a,\varepsilon) \subset A$, pour tout $b \in B(a,\varepsilon)$ on trouve $\eta > 0$ tq $B(b,\eta) \subset B(a,\varepsilon) \subset A$ donc $b \in \mathrm{Int}(A)$

aussi $B(a,\varepsilon) \subset \mathrm{Int}(A)$ qui est donc ouvert

* Mq c'est le plus grand "trivial"

Ex : Soient A et B deux parties de X

1- $\mathrm{Int}(A \cap B)$ et $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

2- $\mathrm{Int}(A \cup B)$ et $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

① égalité : $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subset A \cap B$ et ouvert

donc $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cap B)$

$\mathrm{Int}(A \cap B)$ est un ouvert $\subset A \cap B$ $\left| \begin{array}{l} \subset A \Rightarrow \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}(A) \\ \subset B \text{ ——— } \mathrm{Int}(B) \end{array} \right.$

② $Int(A) \cup Int(B)$ est un ouvert $\subset A \cup B$ donc $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$.

intuition à corriger

$\not\supset$ : $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $Int(A \cup B) = \mathbb{R}$

$Int(A) \cup Int(B) = \emptyset$

~~$Int((A \cup B)) \subset Int(A) \cup Int(B)$~~

<u>Ex</u>: E est un evn $\neq \{0\}$ soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ mq:

$$Int(\overline{B}(a,r)) = B(a,r)$$

<u>D/</u> $B(a,r)$ est un ouvert $\subset \overline{B}(a,r)$ donc $B(a,r) \subset Int(\overline{B}(a,r))$

soit $b \in \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r)$. [objectif: mq b non intérieur]

On a $\|a-b\| = r$ soit $u = \dfrac{a-b}{\|a-b\|}$ / $\varepsilon > 0$ on va prouver

$B(b,\varepsilon) \not\subset \overline{B}(a,r)$ (?)

$\left(c = b + \frac{\varepsilon}{2} u\right)$ $\|c-b\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$ $c \in B(b,\varepsilon)$, mais $\|c-a\| = \|c-b+b-a\|$

$= \|\frac{\varepsilon}{2} u + \|b-a\| u\| = \|(\frac{\varepsilon}{2} + r) u\| = \frac{\varepsilon}{2} + r > r$

$c \notin B(a,r)$ AQT

⚠ $A = \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} \overline{B}(0,1) = \{-1,0,1\} \\ B(0,1) = \{0\} \end{array}\right.$

E) Adhérence:

<u>Déf</u>: Soit $b \in X$, on dit que b est adhérent à A lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \; B(b,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A

**Th :** $X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A)$ ; $\overline{A}$ est fermé ; $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$

D/ $b \notin \overline{A} \iff \exists \varepsilon > 0, B(b,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

$\iff$ ——— $B(b,\varepsilon) \subset X \setminus A \iff b \in \text{Int}(X \setminus A)$

$\overline{A}$ est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert

Si $A \subset F$ fermé il vient $X \setminus F \subset X \setminus A$
$\underbrace{X \setminus F}_{\text{ouvert}}$

donc $X \setminus F \subset \text{Int}(X \setminus A)$

$\underbrace{X \setminus \text{Int}(X \setminus A)}_{\overline{A}} \subset F$

notime

**Th :** Soit $b \in X$. On a

$b \in \overline{A}$
$\Updownarrow$
$\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ $(a_n) \to b$

$(\Uparrow)$ Soit $\varepsilon > 0$. Du fait que $(a_n) \to b$ il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $d(a_n, b) < \varepsilon$ alors $a_{n_\varepsilon} \in B(b,\varepsilon) \cap A$

$(\Downarrow)$ $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ il existe $a_n \in A$ tq $a_n \in B\left(b, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$

$d(a_n, b) < \frac{1}{n+1}$, $a_n \to b$

**Corollaire :** $A$ fermé $\iff \forall a_n \in A^{\mathbb{N}}$, si $(a_n) \to l$ alors $l \in A$

D/ $A$ fermé $\iff \overline{A} = A$

**Ex** Trouver $A \subset \mathbb{R}$ tq, $A, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \overline{A}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient tous 2 à 2 distincts

$A = [0,1[ \cup ]1,2[ \cup (]3,4[ \cap \mathbb{Q}) \cup \{5\}$

**Ex:** Soit $E$ un evn, $(a,r) \in E \times ]0,+\infty[$. Mq

$$\overline{B(a,r)} = \bar{B}(a,r)$$

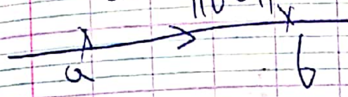
S/ $\bar{B}(a,r)$ est un fermé, qui contient $B(a,r)$ donc

$$\overline{B(a,r)} \subset \bar{B}(a,r)$$

~~méthode~~

Soit $b \in \bar{B}(a,r)$, $b \neq a$. On va Mq $b$ est adhérent à $B(a,r)$

$$u = \frac{b-a}{\|b-a\|} = \frac{b-a}{r}$$



$$a_n = a + \left(r - \frac{1}{n}\right)u \quad \left(n > \frac{1}{r}\right)$$

$$\|a_n - a\| = \left\|\left(r-\frac{1}{n}\right)u\right\| = r - \frac{1}{n} < r$$

$a \in B(a,r)$ et $a_n \to a + ru = b$

**Ex:** ① Soit $C$ une partie convexe de l'evn $E$.
Mq $\bar{C}$ et $\mathring{C}$ sont convexes

~~méthode~~

1) Soit $a, b \in \bar{C}$ ; $\lambda \in [0,1]$. On veut Mq $(1-\lambda)a + \lambda b \in \bar{C}$

On a $\begin{cases} \exists a_n \in C^{\mathbb{N}} & a_n \to a \\ \exists b_n \in C^{\mathbb{N}} & b_n \to b \end{cases}$ alors $\underbrace{(1-\lambda)a_n + \lambda b_n}_{\in C} \to (1-\lambda)a(?) + \lambda b \in C$

STUCK !! 2) Soient $a$ et $b$ dans $\mathring{C}$. Il existe $\varepsilon > 0$: $B(a,\varepsilon) \subset C$, $B(b,\varepsilon) \subset C$

Soit $c = (1-\lambda)a + \lambda b$ si $x \in B(c,\varepsilon)$

$u = x - c \in B(0,\varepsilon)$

Soient $\begin{cases} x' = a + u \in B(a,\varepsilon) \subset C \\ x'' = b + u \in B(b,\varepsilon) \subset C \end{cases}$ $\Big|$ $(1-\lambda)x' + \lambda x'' = (1-\lambda)a + \lambda b + u = x$

$c = \lambda a + (1-\lambda) b$

$Mq\ \exists \varepsilon\ B(c,\varepsilon) \subset C$

de là $B(c,\varepsilon) \subset C$ et $C \in \mathring{C}$

**Ex :** $a \in \mathring{C}$ et $b \in \overline{C}$ $Mq\ [a, b[ \subset \mathring{C}$

$x_n \to c$, $x_n \in B(c, 2^{-n})$

$c \in \mathring{C}$, $c \in \overline{C}$

**Ex :** Soit $A$ un sev de l'evn $E$

$Mq\ \overline{A}$ est un sev de $E$, et que $\mathring{A} \neq \emptyset \iff A = E$

S/ $\Rightarrow$ Soit $a \in \mathring{A}$ il existe $r > 0$ tq $B(a,r) \subset A$

* Soit $u \in B(0,r)$ ; $u = \underbrace{a + u}_{\in B(a,r)} - \underbrace{a}_{\in A} \in A$ ; $\boxed{u \in A}$

$B(0,r) \subset A$

** Soit $x \in E \setminus \{0\}$ $u = \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0,r)$ donc $u \in A$

$x = \frac{2\|x\|}{r} u$, $u \in A$

Conséquence si $H$ est un Hyperplan de $E$

$$\underset{\text{sev}}{H \subset \overline{H}} \subset E \quad \begin{cases} \overline{H} = H \\ \text{ou} \\ \overline{H} \text{ dense} \end{cases}$$

$H \neq \emptyset$

**Ex :** $H =$

Ex : $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ $F = \{f \in E \mid f \geq 0\}$

a) Mq F est fermé pour $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$

b) Donner $\mathring{F}$ pour $\| \|_\infty$, $\| \|_1$

S/

a) Si $f_n \xrightarrow{\| \|_\infty} f$ il vient $f_n \xrightarrow{CVS} f$, $\{\forall x, f_n(x) \to$

donc $f \geq 0$, $f \in F$

si $f_n \xrightarrow{\| \|_1} f$, il vient, s'il existe $a \in [0,1]$

$f(a) < 0$, $0 < a < 1$, on trouve $\delta > 0$ tq $\forall x \in [a-\delta, a+\delta]$

$f(x) < \frac{1}{2} f(a)$

alors $\int_0^1 |f_n - f| \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} \underbrace{(f_n - f)}_{\geq 0 \;\leq \frac{1}{2} f(a)} \geq \delta$

$\|f_n - f\|_1 \not\to 0$

b_ $\Omega = \{f \in E, f > 0\}$ est ouvert et $\subset F$, donc $\Omega \subset \mathring{F}$

Si $f \in F \setminus \Omega$, il existe $a \in [0,1]$ tq $f(a) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$, en considérant $g = f - \varepsilon/2$ on obtient

$g \in B_{\| \|_\infty}(f, \varepsilon)$ ; $g(a) = -\varepsilon/2 < 0$ | donc $B_{\| \|_\infty}(f, \varepsilon) \not\subset F$

(C) $f \notin \mathring{F}$, et donc $\Omega = \mathring{F}$

$\mathring{F} = \emptyset$ pour $\| \ \|_1$

## E) Densité :

**Déf :** Soient $A$ et $B$ deux parties de l'evn $(X,d)$. On dit que $B$ est dense dans $A$ lorsque $A \subset \overline{B}$ et partout dense dans $X$ lorsque $\overline{B} = X$.

**Ex :** $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ pour les normes usuelles

Transitivité si $B$ est dense dans $A$ et $C$ dans dans $B$ alors $C$ est dense dans $A$.
$\overline{C} \supset B$

**Ex :** si $F$ est un sev de $E$ (evn), $F \neq E \Rightarrow E\setminus F$ est dense dans $E$
En effet on a $F \neq E \Rightarrow \mathring{F} = \emptyset$

**Ex :** 1) Sous groupe de $\mathbb{R}$
Soit $G$ un sous groupe additif de $\mathbb{R}$, on note
$A = \{x \in G \mid x > 0\}$

1) Si $G \neq \{0\}$, vérifier $A \neq \emptyset$. On note $A = \{x \in G / x > 0\}$

Soit $G$ un sg additif

2) Si $a = 0$ mq $\overline{G} = \mathbb{R}$ 3) si $a > 0$ mq $G = a\mathbb{Z}$

1) Mq $\overline{\{\cos n, n \in \mathbb{N}\}} = [-1, 1]$

3) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant 1 et $\sqrt{2}$ comme période, mq est cste

S/ 1) Soit $x \in G \setminus \{0\}$, Si $x < 0$, $-x \in G$ donc $-x \in A$

2) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in A$ tq $a < \alpha < \varepsilon$

$\{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset G$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n\alpha \leq x\}$

il vient : $n\alpha \leq x < (n+1)\alpha$ donc $|x - n\alpha| < \alpha < \varepsilon$

$\overline{G} = \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \in \overline{G} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$
$B(x, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$

3) $a \in G$ (?) Si $a \notin G$ il existe $x \in G$ tq $a < x < 2a$
$y \in G$ $a < y < x < 2a$

il vient $x - y \in G$ et $0 < x - y < a$ ↯

Cela fait si $x \in G$ $x = na + r$ $0 \leq r < a$ $\left(n = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor\right)$

avec $r = x - na \in G$, $r \in [0, a[$, $r = 0$

($\subset$) $G \subset a\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \subset G$ donc $G = a\mathbb{Z}$

4) Soit $G = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ ; ssg de $(\mathbb{R}, +)$ ; si $G = a\mathbb{Z}$

$\exists p, q$ $2\pi = pa$, $1 = qa$
$\Rightarrow 2\pi = p/q$ absurde

$\overline{G} = \mathbb{R}$, par $\mathcal{C}^0$ de cos $\{\cos x \mid x \in G\}$ est dense dans $\cos \mathbb{R}$

si $y \in \mathbb{R}$ $\exists (x_n) \in G^{\mathbb{N}}$ $(x_n) \to y$ et donc $\cos x_n \to \cos y$

finalement $\overline{\{\cos n, n \in \mathbb{N}\}} = [-1, 1]$

5) $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ dense $\forall (x_n) \to x$ : $f(x_n) \to f(x)$
dans $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$

donc $f(x) = f(0)$

variante : $\underbrace{(\sqrt{2} - 1)^n}_{\varepsilon_n}$ est une période (Pmo)

$\varepsilon_n \to 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $p_n$ tq $|x - p_n \varepsilon_n| \leq \varepsilon_n$

il vient $f(x) = f(x - p_n\varepsilon_n + p_n\varepsilon_n)$

$= f(\underbrace{x - p_n\varepsilon_n}_{\to 0}) \to f(0)$

**Ex : Espaces séparables.**

améliorer l'intuition

**Déf :** $(X, d)$ séparable $\Leftrightarrow$ $\exists A \subset X$ dénombrable dense

Ex: Mq $X$ séparable $\Updownarrow$ il existe une famille ~~finie~~ dén d'ouverts $(\Omega_i)_{i\in I}$

$\forall O$ ouvert de $X$ $\exists J \subset I$ $O = \bigcup_{i\in J} \Omega_i$

S/ ($\Uparrow$) On suppose $\forall i, \Omega_i \neq \emptyset$

soit $a_i \in \Omega_i$, $A = \{a_i\}_{i\in I}$

Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$

hyp $\exists J \subset I$, $B(x,\varepsilon) = \bigcup_{i\in J} \Omega_i$

et lorsque $i \in J$ $a_i \in B(x,\varepsilon)$

($\Downarrow$) soit $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dense dans $X$.

On envisage $\Omega_{n,m} = B(a_n, \frac{1}{m})$

Soit $O$ un ouvert de $X$, $J = \{(n,m) \mid \Omega_{n,m} \subset O\}$

Clair $\bigcup_{(n,m)\in J} \Omega_{n,m} \subset O$. Pour obtenir l'inclusion inverse

on se donne $x \in O$. Il existe, $O$ étant ouvert $\varepsilon > 0$ tq $B(x,\varepsilon) \subset O$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$

comme $\overline{A} = X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $d(a_n, x) < \frac{1}{m}$

il vient $x \in \Omega_{n,m}$

si $y \in \Omega_{n,m}$ $d(x,y) < d(x,a_n) + d(a_n,y) < \frac{2}{m} < \varepsilon$

donc $y \in B(x,\varepsilon)$

Bref $\Omega_{n,m} \subset B(x,\varepsilon)$ $[(m,n) \in \mathcal{J}]$, on a l'inclusion inverse

Rayon

(HP) Compléments : $(X,d)$ est un em

① Frontière si $A \subset X$, il s'agit de $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

On sait que $\mathring{A} = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ donc

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

Ex : $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ; $\partial([a,b]) = \{a,b\}$

$\partial(\bar{B}(0,1)) = S(0,1)$

Exo : si $A$ est ouvert, $\partial A$ est d'intérieur vide

S/ ABS : soit $a \in \partial A$ ; si $a$ est intérieur à $\partial A$, il existe $\varepsilon > 0$ tq $B(a,\varepsilon) \subset \partial A$

$\begin{cases} a \text{ est adhérent à } A \text{ et à } X \setminus A \\ \text{tout } x \in B(a,\varepsilon) \end{cases}$

$B(a,\varepsilon) \cap A$ est donc un ouvert $\neq \emptyset$

Soit $x_0 \in B(a,\varepsilon) \cap A$, il existe donc $\eta > 0$ tq

$B(x_0,\eta) \subset B(a,\varepsilon) \cap A$

améliorer intuition { Un tel $x_0$ n'est pas adhérent à $X \setminus A$ (il est intérieur à $A$)

$x_0 \notin \partial A$ ↯

② Points d'accumulation

**Déf** : $A \subset X$ $a \in A$ est dit isolé lorsque $\exists \varepsilon > 0$ $B(a,\varepsilon) \cap A = a$ : $\overset{i}{A}$ ..

$a \in X$ est dit d'accumulation si $\forall \varepsilon > 0$ $B(a,\varepsilon) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$

pas forcément dans A

**Prop** : 1) $A^{ac} \cup A^{i} = \overline{A}$ 2) $a \in A^{ac} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $B(a,\varepsilon) \cap A$ est infini

$a \in \overline{A}$

**D/** 1) il vient $\forall \varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\exists \varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\underbrace{B(a,\varepsilon) \cap A}_{\text{non vide}} \neq \{a\}$

$\ni \neq \{a\}$

rayon

**Ex** $A = \mathbb{Z}$, $A^{i} = \mathbb{Z}$, $A^{ac} = \emptyset$

$A = \mathbb{Q}$, $A^{i} = \emptyset$, $A^{ac} = \mathbb{R}$

Reformulation de BW

Toute partie infinie bornée de $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation

En effet : Si A est une telle partie, on dispose d'une suite injective